*

Noen betraktninger over urindivider i Zermelo-Fraenkel mengdelære.

*

Morten Rognes

1986

*

§1

I Rognes [1] ga vi en fremstilling av det mengdeteoretiske systemet ZFC;u(L;e) som er en modifisert versjon av det vanlige Zermelo-Fraenkel systemet for mengdelære. I denne modifiserte versjonen kan man omtale såkalte urindivider, dvs. entiteter som ikke er mengder. I Rognes [2] ble det gitt et konsistensbevis for dette systemet og vi viste også en rekke konsistensresultater for systemet ZFC;u(L;e) når dette utvides med visse aksiomer som sier noe om kardinaltallet til mengden av urindividene. I dette skrift, som forutsetter full fortrolighet med Rognes [1] og Rognes [2] vil vi se på en utvidelse av ZFC;u(L;e) som vi ikke har betraktet tidligere og formulere en intepretasjon av denne utvidelsen. Vi vil dernest formulere et relativt konsistensteorem for dette nye system og kort skissere hvordan dette bevises.

§1.1

Språket L;e ble definert i Rognes [1], §4. Det er det første-ordens språket som har som eneste ikke-logiske konstruksjoner de to predikatene "x er en mengde" , som vi forkorter med "M(x)" og "x er et element i mengden y" som vi forkorter med "xêy". Det bør bemerkes at ved siden av kvantorene og de utsagnslogiske konnektivene inngår i L;e identitet, "=", som et primitivt logisk predikat. Systemet ZFC;u(L;e) er så det systemet som er beskrevet i Rognes [2], §1. Ved siden av de vanlige logiske aksiomene i L;e, samt slutningsreglene modus ponens og universell generalisering, har dette aksiomene M1 – M12 som ikke-logiske aksiomer. Disse aksiomene er angitt i Rognes [2], §1.

Den teorien som nå vil bli betraktet er en modifikasjon av denne teori. Vi utvider språket L;e med en ny binær predikatkonstruksjon, " y er det urindividet som er korrelert med mengden x", som vi forkorter med "F;0(x,y)". Det språket som fremkommer som resultat når det logiske vokabularet til L;e utvides med dette predikatet kalles her for "L;(e,c)". Aksiomene i den nye teorien er for det første de vanlige aksiomene for de utsagnslogiske konstruksjonene, kvantorene og identitetspredikatet i L;(e,c). Dernest aksiomene M1, M3 – M12, omtalt i Rognes [2], §1, utvidet til å gjelde L;(e,c). (Vi sløyfer altså urmengdeaksiomet, M2, som sier at det finnes en mengde som inneholder de og bare de entiteter som er ikke-mengder.) Tilslutt legger vi til det følgende aksiom for konstruksjonen F;0:

Ur7	(i)	F;0(x,y) & F;0(x,z) –> y=z
	(ii)	F;0(y,x) & F;0(z,x) –> y=z
	(iii)	(Ax)(M(x) –> (Ey)(F;0(x,y))
	(iv)	(Ax)(M(x) &F;0(x,y) –> ¬M(y))

Endelig er slutningsreglene i dette systemet de vanlige, nemlig modus ponens og universell generalisering.

Som man ser sier aksiomet Ur7 at relasjonen F;0 er en korrelasjon (Punkt (i) og (ii)), at enhver mengde er med i domenet til F;0 (Punkt (iii)), og at enhver mengde tilordnes nøyaktig ett urindivid (Punkt(iv)). Aksiomet impliserer med andre ord at F;0 er en korrelasjon hvor klassen av mengder er inkludert i domenet og hvor korrelasjonen tilordner enhver mengde et urindivid.

Den teorien som nå er beskrevet kalles for ZFC;u-(L;(e,c)) + Ur7.

§1.2

Defineres funksjonen f:0 ved f;0= Mg(<x,y>: F;0(x,y)) er det nokså lette å vise at man ikke kan ha at M(f;0), dvs. at f;0 ikke kan være en mengde i den teorien som nå har blitt definert. Dette innebærer at f;0 ikke eksisterer i det kumulative hierarki som utgjør en naturlig modell for teorien. Det er også lett å se at domenet til f;0, såvel som verdiområdet, ikke er mengder. For hadde man M(Dom(f;0)) ville man i lys av utsondringsaksiomet ha at M(Mg(x:M(x)). Men det er umulig. f;0 er altså en global funksjon som til alle mengdene i universet plukker ut en-tydig et urindivid. Uten sammenligning forøvrig kunne man kanskje sammenligne f;0 med en global utvalgsfunksjon som til enhver ikke-tom mengde plukker ut et element fra denne mengden. (Se Takeuti [1], side 87, "Remark")

§1.3

Det er nærliggende å sammenligne den teorien som nå har blitt beskrevet med teorien ZFC;u-(L;e) + Ur6 som ble definert i Rognes [2], §4. Ur6 er den følgende formel i L;e:

Ur 6 $(Ax)(M(x) \rightarrow (Ey)(M(y) \& y \approx x \& (Az)(z \hat{e} y \rightarrow \neg M(z))))$

Som man ser uttrykker Ur6 at hvis x er en vilkårlig mengde finnes det alltid en likemektig mengde som utelukkende inneholder urindivider. Man kan forholdsvis lett utlede Ur6 i teorien ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7. For anta x er en vilkårlig mengde. Er x nullmengden er det lett å se at Ur6 holder. Man kan da la y i Ur6 være denne mengden selv. Er x forskjellig fra nullmengden har man at
z;0 = xΩMg(y:M(y)) er en mengde ifølge utsondringsaksiomet og at z;0 bare inneholder mengder. Da har man ved hjelp av substitusjonsaksiomet at f;0 ‘‘z;0 er en mengde og at f;0 ‘‘z;0 ≈ z;0. Nå har man, om man per definisjon setter
z;1= x–z;0, at z;1 bare inneholder urindivider og at z;1 er en mengde ifølge utsondringsaksiomet. Imidlertid har man ingen garanti for at ikke f;0‘‘z;0 overlapper med z;1= x–z;0. Betrakt derfor q(z;1)= Mg(<r,x>: rêz;1). Man har åpenbart at z;1 ≈ q(z;1) og at q(z;1)Ωx = ø. Videre følger at q(z;1) bare inneholder mengder. Da har man at f;0‘‘z;0 U f;0‘‘q(z;1) ≈ x og at f;0‘‘z;0 U f;0‘‘q(z;1) bare inneholder urindivider. Dette viser at Ur6 kan utledes i teorien
ZFC;u–(L;(e,c))+Ur7. Fra dette følger at alle teoremene i ZFC;u–(L;e)+Ur6 er blandt teoremene i ZFC;u–(L;(e,c))+Ur7. Mao. er det førstnevnte system, deduktivt sett, inkludert i det sistnevnte.

Man kan i denne forbindelse spørre om ZFC;u–(L;(e,c)) +Ur7 er en konservativ utvidelse av ZFC;u–(L;e)+Ur6, mao. om det er slik at eknhver formel som er med i L;e og som er bevisbar i ZFC;u–(L;(e,c)) +Ur7 også er bevisbar i ZFC;u–(L;e)+Ur6. Vi har ikke fått tid til noen inngående analyse av dette problem som derfor får stå åpent her.

Et annet spørsmål som virker interessant er om det er mulig å spesifisere i L;e en formel Q(x,y) med x og y som eneste fri, distinkte variabler slik at hvis man per definisjon setter g;0= Mg(<x,y>: Q(x,y)) så kan man i ZFC;u–(L;e)+Ur6 vise at g;0 har de egenskapene som er angitt i Ur7, dvs. at g;0 er en en-entydig funksjon som til enhver mengde tilordner et urindivid. Heller ikke her har vi noen resultater og fremlegge. Spørsmålet for derfor stå åpent for videre undersøkelser.

§2

Vi kommer nå til vårt hovedanliggende i dette skrift. For det første ønsker vi å presentere en intepretasjon av systemet ZFC;u–(L;(e,c)) +Ur7. For det andre ønsker vi å vise at dette system er konsistent relativt til et annet mer velkjent mengdeteoretisk system.

§2.1

I det følgende betegner ZFC systemet ZF utvidet med utvalgsaksiomet slik dette system er presentert i Takeuti [1]. Språket til ZFC er da det første-ordens språket man får når man fjerner identitet og mengdepredikatet "M(x)" fra L;e. Dette språket kalles for L. Ved siden av kvantorene og de utsagnslogiske konnektivene inneholder derfor L bare medlemskapspredikatet "xêy".

§2.2

Før vi her presenterer vår intepretasjon av systemet ZFC;u–(L;(e,c)) +Ur7 vil vi her skyte inn noen mer uformelle bemerkninger om den naturlige modellen vi har i tankene i forbindelse med dette systemet.

Med det kumulative hierarki over mengden X forstår vi mengdesekvensen V;a(X), der a er et ordinaltall og som er bygget opp på den følgende måte:

Mengden av entiteter på nivå 0 skal være elementene i X. Dette innebærer at man setter (0) V;0(X) = X. Mengden av entiteter på nivå 0 kaller vi også kortere for nivå 0. Nivå 1 er så den mengden man får når man tar nivå 0 og legger til alle delmengder av dette nivå. Vi betegner dette nivå med V;1(X) og setter: V;1(X) = XU Pt(X). Nivå 2 fås så ved å legge til alle delmengder av nivå1 til nivå 1. Dette innebærer at man har: V;2(X) = V;1(X) U Pt(V;1(X)). Ved å fortsette på denne måten kan man danne nivå n for ethvert endelig ordinaltall n.

Fra redegjørelsen så langt fremgår det altså at nivå 0 er inkludert i nivå 1 og at dette i sin tur er inkludert i nivå 2. Allment gjelder at ethvert nivå er inkludert i ethvert senere nivå.

Er nå a et vilkårlig ordinaltall – og tenker vi oss at V;a(X) er gitt – vil det umiddelbart etterfølgende nivå , nivå a+1, være den mengden man får når man legger elementene i Pt(V;a(X)) til V;a(X):

(1) V;(a+1)(X) = V;a(X) U Pt(V;a(X))

Tilslutt bemerkes det at hvis man tenker seg at a er et limesordinaltall og at alle nivåene før nivå a er gitt, dvs. de diverse nivå b for b<a, så lar vi nivå a være unionen av alle disse tidligere nivåene. Dette innebærer at vi setter:

(2) V;a(X) = UN/b<a/(V;b(X)) om a er et limesordinaltall.

Fra (0) - (2) ser man at V;a(X) er fiksert for ethvert ordinaltall a, gitt at X er fiksert.

La oss nå tenke oss en funksjon f;0 som til hver mengde tilordner en-entydig et bestemt urindivid. En slik funksjon er som vi allerede har sett postulert i systemet ZFC;u–(L;(e,c)) +Ur7. Vi kan nå generere urindivider ved en trinnvis prosess på den følgende måte:

Vi betegner urindividene på nivå 0 med Ur;0 og setter (3) Ur;0 = ø. Vi betrakter så det kumulative hierarki over Ur;0 opp til nivå 1 minus urindividene på nivå 0, mao.: V;1(Ur;0) – Ur;0. Siden man har V;1(Ur;0)= V;1(ø) = øUPt(ø) ={ø} har man at V;1(Ur;0) – Ur;0 = {ø} Vi lar derfor urindividene på nivå 1 være dem på nivå 0 pluss de som er med i f;0‘‘(V;1(Ur;0) – Ur;0). Mao. setter vi:

(4) Ur;1 = f;0‘‘(V;1(Ur;0) – Ur;0)

Gitt nå urindividene på nivå 1 kan man generere urindividene på nivå 2 slik: Man danner det kumulative hierarki over Ur;1 opp til og inkludert nivå 2. Mao. studerer man V;2(Ur;1). Vi trekker så fra urindividene i dette hierarkiet slik at vi får V;2(Ur;1) – Ur;1. Denne mengden

vil da bare inneholde mengder. Vi ser så på urindividene som f;0 tilordner mengdene i denne mengden, nemlig: f;0‘‘(V;2(Ur;1) – Ur;1) og legger disse til Ur;1. Da får vi urindividene på nivå 2. Vi setter derfor:

(5) Ur;2 = f;0‘‘(V;2(Ur;1) – Ur;1) U Ur;1

Gitt nå urindividene på nivå a, Ur;a. Det er da nærliggende å definerer Ur;(a+1) i analogi med (4) og (5) ovenfor:

(6) Ur;(a+1) = f;0‘‘(V;(a+1)(Ur;a) – Ur;a) U Ur;a

Tilslutt kan vi definere Ur;a, om a er et limesordinaltall, som unionen av urindividene på alle de tidligere nivåer. Det er altså naturlig å sette:

(7) Ur;a= UN/b<a/(Ur;b) om aêK;II.

Universet av entiteter i den "naturlige" modell for ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7 som vi har i tankene kan nå nærmere karakteriseres som:

UN/aêOn/(UN/bêOn/(V;b(Ur;a)))

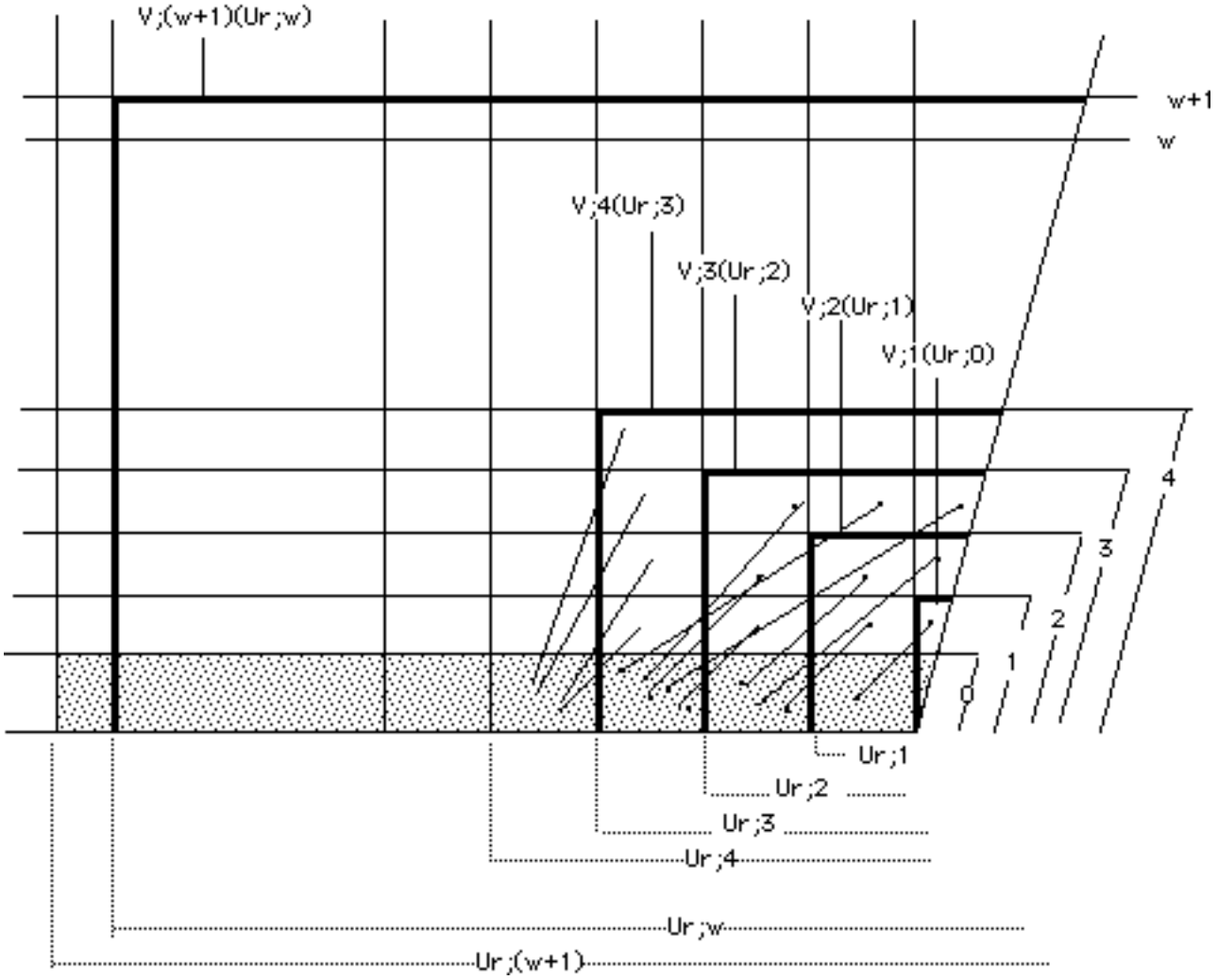
Dette innebærer at noe er en entitet i universet til denne modellen hvis og bare hvis det er med i det kumulative kierarki over Ur;a opp til b for noen ordinaltall a,b. Urindividene i denne modellen kan så identifiseres med elementene i mengden UN/aêOn/(Ur;a). Mengdene i modellen er, som man forventer, de elementene i UN/aêOn/(UN/bêOn/(V;b(Ur;a))) som ikke er urindivider. Medlemskapsrelasjonen i modellen er den vanlige, men begrenset til det univers vi nå har beskrevet.

Det universet som har blitt konstruert ovenfor kan anskueliggjøres ved den helt uformelle figuren på neste side.

§2.3

I der følgende betegner æ det minsteutilgjengelige kardinaltall. I betegner den formelen i L som sier at det finnes utilgjengelige kardinaltall og ZFC+I er

Figur 1


V;(w+1)(Ur;w)
w+1
w
V;4(Ur;3)
V;3(Ur;2)
V;2(Ur;1)
V;1(Ur;0)
4
3
2
1
0
Ur;1
Ur;2
Ur;3
Ur;4
Ur;w
Ur;(w+1)

systemet ZFC (definert som i Takeuti [1]) utvidet med I som nytt ikke-logisk aksiom.

Vi vil nå presentere en avbildning ß der ß: Fm(L;(e,c)) –> Fm(L) som vi vil vise at avbilder alle teoremene i ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7 på teoremer i ZFC+I og som dessuten er slik at for alle PêFm(L;(e,c)) har man:

ß(P & ¬P) = ß(P) &¬ß(P).

Dette vil da forsikre oss om at vårt system er konsistent dersom ZFC + I er det. Når det gjelder ZFC+I bemerker vi bare at det blandt logikere og matematikere synes å være nokså få som forventer at dette systemet er inkonsistent. Dette er selvfølgelig ikke noe bevis for at det ikke er inkonsistent. Men selvom det mot formodning skulle være tilfelle, hvilket altså er svært vanskelig å tro, kunne det likevel være at ZFC er konsistent og at man kunne vise den relative konsistens til ZFC for vårt system ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7.

Innenfor rammen av ZFC defineres først det kumulative hierarki over X på den følgende måte ved transfinite induksjon:

(1) (i) V;0(X) =X
(ii) V;(a+1)(X) = V;a(X) U Pt(V;a(X))
(iii) V;a(X) = UN/b<a/(V;b(X))

Dernest defineres sekvensen <Q+;a>/aêOn/ ved transfinit induksjon slik:

(2) (i) Q+;a = ø
(ii) Q+;(a+1) = Mg({x,æ}: xê(V;(a+1)(Q+;a)–Q+;a)) U Q+;a
(iii) Q+;a = UN/b<a/(Q+;b) om aêK;II

I forbindelse med den intepretasjonen som nå straks vil bli definert er det meningen at UN/a<æ/(Q+;a) skal representere urindividene og at

UN/a<æ/(UN/b<æ/(V;a(Q+;b))

skal representere hele universet. Av den grunn defineres "Ur" og "Set" ved:

(3) Ur = UN(Mg(Q+;a : a<æ))
(4) Set = (UN(Mg(V;a(Q+;b): a,b <æ))) – Ur

Det kan bemerkes at definisjonen av Q+;a er analog med definisjonen av Ur;a, urindividene på nivå a, som ble gitt i forrige paragraf. Det er også tanken at de diverse {x,æ}, der x er en mengde, representerer urindividene. (I ZFC+I må urindividene representeres ved mengder av en eller annen art fordi alt i universet til ZFC + I er mengder.)

Avbildningen ß: Fm(L;(e,c)) –> Fm(L) defineres slik:

(5) (i) ß(¬P) = ¬ß(P)
(ii) ß(P&Q) = ß(P) & ß(Q)
(iii) ß(PvQ) = ß(P) v ß(Q)
(iv) ß(P –> Q) = ß(P) –> ß(Q)
(v) ß(P <–>Q) = ß(P) <–> ß(Q)
(vi) ß((Ax)P) = (Ax)(xêSet U Ur –> ß(P))
(vii) ß((Ex)P) = (Ex)(xêSet U Ur & ß(P))
(viii) ß(x=y) = (x,yê(Set U Ur) & x=y)
(ix) ß(M(x)) = xêSet
(x) ß(xêy) = (x,yê(Set U Ur) & yêSet & xêy)

(xi) ß(F;0(x,y)) = (xêSet & yêUr & y = {x.æ})

Dette avslutter definisjonen av intepretasjonen ß. Hovedteoremet kan nå formuleres slik:

Teorem 1 La S;1 være teorien ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7. La S;2 være teorien ZFC+I. Da har man:

(a) (AP)(PêFm(L;(e,c)) & PêTh(S;1) –> ß(P)êTh(S;2))

(b) S;1 er konsistent relativt til S;2. Det er med andre ord slik at hvis (EP)(PêFm(L;(e,c)) & (P&¬P)êTh(S;1)) så er det også slik at (EP)(PêFm(L) & (P&¬P)êTh(S;2))

(c) Er P;1,...,P;n formler i L;(e,c) og er P;1,...,P;n et bevis for P;n i S;1 så er også ß(P;1),...,ß(P;n) et bevis for ß(P;n) i S;2.

I forbindelse med dette teoremet bemerkes det at punktene (b) og (c) er meget enkle korollarer til punkt (a) og følger fra dette punkt ved hjelp av definisjonen av ß. Derimot er beviset for (a) meget arbeidskrevende om det skal gjennomføres detaljert.

§2.4

Vi vil nå skissere, men ikke detaljert gjennomføre, beviset for Teorem 1. Som antydet ovenfor er det tilstrekkelig å vise punkt (a), siden (b) og (c) er nokså trivielle følgesetninger til dette punkt.

For å bevise punkt (a) må man etablere to satser: (i) Er P et aksiom i S;1 så er ß(P) et teorem i S;2. (ii) Mg(P: PêFm(L;(e,c)) & ß(P)êTh(S;2)) er lukket under modus ponens og universell generalisering. (Som forøvrig er de eneste slutningsregler om figurerer i våre teorier)

Punkt (ii) følger umiddelbart fra definisjonen av ß og det faktum at mengden av teoremer i S;2, Th(S;2), er lukket under modus ponens og universell generalisering. Når det gjelder punkt (i) må man først vise at alle de utsagns-logiske, kvantifikasjonsteoretiske og identitetsteoretiske aksiomene i S;1 over-føres til teoremer i S;1 når ß anvendes på dem. I lys av konstruksjonen av ß, dvs. definisjonen (5) i forrige paragraf, er det nokså åpenbart at dette er tilfelle, slik at vi her hopper nokså lett over dette punkt. Leseren kan, om vedkommende ønsker det, selv utforme detaljerte bevis.

Dernest må man vise at ß(P) er et teorem i S;2 dersom P enten er M1,M3 – M12 eller Ur7. Det er dette som er arbeidskrevende om ikke nødvendigvis spesielt vanskelig.

Det er imidlertid mulig å benytte seg av det arbeid som er utført i Rognes [2]. I §7 i Rognes [2] definerte vi en intepretasjon av L;e inn i L, ∂;æ. (Se Rognes [2], §7, Definisjon 7.1 og Definisjon 7.3 – 7.4). Man ser at det er en sterk analogi mellom definisjonen av ß som ble gitt ovenfor og vår tidligere definisjon av ∂;æ. Faktisk ser man at punkt (i) – (x) i definisjonen av ß ovenfor fremkommer om vi i definisjonen av ∂;æ erstatter "K+" med "Set U Ur" og "Q+" med "Ur". Det eneste som mangler er klausulen for predikatet "F;0(x,y)". Men denne klausul er selvfølgelig utelatt i definisjonen av ∂;æ siden dette predikatet ikke inngår i L;e og derfor ikke er relevant for å vise at ∂;æ(P) er et teorem i ZFC+I om P er en av formlene M1, M3 – M12.

Studerer man definisjonen 7.3 i §7 i Rognes [2] ser man at:

(1) K+ = UN/d<æ/(UN/a<æ/(Q(d,a)))

(2) Q+ = UN/d<æ/(Q(d,0))

der Q(d,a) er definert induktivt ved hjelp av Definisjon 7.1 i det nevnte arbeid. Nå har man at:

(3) Set U Ur = (UN(Mg(V;a(Q+;b): a,b <æ)))
(4) Ur = UN(Mg(Q+;a : a<æ))

Man ser fra (1) – (4) at det er en fullstendig analogi mellom (1) og (2) på den ene side og (3) og (4) på den andre side.

Undersøker man teoremene Teorem 1 – Teorem 49 i §9 – §11 i Rognes [2] skulle det være klart at bevisene for at ß(P) er et teorem i ZFC+I om P er M1 eller et av aksiomene M3 – M12 blir helt analoge med de tilsvarende bevis i forbin-delse med avbildningen ∂;æ. Man behøver bare å erstatte "K+" med "Set U Ur" og "Q+" med "Ur". Disse teoremene blir bevist ved hjelp av setningene i §9 og §10. Saken er nå den at alle teoremene i §9 og §10 holder om man konsekvent i disse setningene erstatter "Q(d,a)" med "V;a(Q+;d)", "K+" med "Set U Ur" , "Q+" med "Ur" og "∂;æ" med "ß". Man må imidlertid se bort fra de deler av teoremene som har med intepretasjonen ∂;t å gjøre. Det man også kan se er at det bare er noen av disse setningene som trenger nye bevis om man foretar disse erstatningene. Dette gjelder utelukkende setningene i §9. Av disse må f. eks. Teorem 1 bevises på nytt, selvom setningen fremdeles holder om den endres slik som beskrevet ovenfor. Derimot kan Teorem 3 – 5 overtas uavkortet sammen med bevisene. Det samme gjelder Teorem 6 med mindre endringer i beviset. Det eneste som trengs er en forandring i punkt (i) i beviset. Nå kan man lett vise:

Lemma 1 (Aa)(aêOn & a>0 & xêQ+;a –> (Ey)(x = {y,æ}))

Bevis: Anta (1) aêOn & a>0 & xêQ+;a. Sett (2) a;0 = µa(aêOn & a>0 &xêQ+;a) Hadde man da a;0êK;II ville vi ha xêQ+;(a;0) = UN/b<a;0/(Q+;b) og derfor at xêQ+;b for noe ordinaltall b<a;0. Siden xêQ+;a & a>0 har vi ikke xêQ+;0. Det følger derfor at b>0. Men dette strider mot (2). Man må derfor ha at a;0=g+1 for noe ordinal tall g der g≥0. Det følger at:

xêQ+;(a;0) = Q+;(g+1) = Mg({z,æ}: zê(V;(g+1)(Q+;g) – Q+;g)) U Q+;g

Da kan man ikke ha xêQ+;g siden g<a;0 og 0<g. Dette ville stride mot (2). Det følger da at x={y,æ} for noe y der yê(V;(g+1)(Q+;g) – Q+;g) som er det vi ønsker. **QED.**

Ved hjelp av denne hjelpesetningen kan man bevise:

Lemma 2 ¬((Ea)(aêOn & æêQ+;a)

Bevis: Hadde man mot formodning æêQ+;a for noe aêOn måtte a>0. Da følger ved hjelp av Lemma 1 at æ={y,æ} for noe y. Da har man imidlertid at æêæ som åpenbart er umulig i lys av Fundierungs-aksiomet. **QED.**

Brukes Lemma 2 er det lett å se at man kan gjennomføre beviset for Teorem 6 i §9 i Rognes [2]. Det er også lett å vise den følgende sats:

Lemma 3 a,bêOn & a≤b –> Q+;a Inkl Q+;b

Dette bevise lett ved induksjon.

Ved hjelp av Lemma 1 og Lemma 3 kan man så gjennomføre beviset for Teorem 1 uten nevneverdige vanskeligheter. De resterende teoremer i §9 i Rognes [2], nemlig Teorem 7 – Teorem 17 lar seg så bevise på den måten som er gjort.

Konklusjonen blir at ß(P) er et teorem i ZFC+I om P er en av formlene M1, M3 – M12.

Det er imidlertid nødvendig å bevise:

Lemma 4 ß(Ur7) er et teorem i ZFC+I.

Bevis: Man har at den første konjunkten i Ur7 er den følgende formel:

P;0 = (F;0(x,y) & F;0(x,z) –> y=z)

Man ser da lett på basis av definisjonen av ß at ß(P;0) er den følgende formel i L:

(1) x,y,zê(Set U Ur) –> ((xêSet & yêUr & y={x,æ} & xêSet & zêUr & z={x,æ}) –> (y=z & y,zê(Set U Ur))

Man ser umiddelbart at (1) holder. Beviset for at ß(P;1), der

P;1 = (F;0(y,x) & F;0(z,x) –> y=z)

holder i ZFC+I er av en tilsvarende elementær natur. Den tredje komponenten i Ur7 er:

P;2 = ((Ax)(M(x) –> (Ey)(F;0(x,y))))

I dette tilfellet har man at ß(P;2) er den følgende formel:

(2) (Ax)(xê(Set U Ur) –> (xêSet –> (Ey)(yê(Set U Ur) & yêUr & xêSet & y={x,æ})))

Det er lett å se at (2) i ZFC+I er bevisbart ekvivalent med den følgende formel:

(3) (Ax)(xêSet –> (Ey)(yêUr & y={x,æ}))

Det er derfor tilstrekkelig å bevise (3). Anta derfor xêSet for vilkårlig x. Da har man i lys av definisjonen av Set at xêV;a(Q+;b) & ¬(xêUN/g<æ/(Q+;g)) for noen a,b<æ. La d = Max(a,b). Da har man V;a(Q+;b) Inkl V;d(Q+;d) Inkl V;(d+1)(Q+;d). Leseren kan selv sjekke dette. Det følger at xê(V;(d+1)(Q+;d) – Q+;d). Da har man imidlertid at {x,æ}êQ+;(d+1) Inkl Ur. Setter man y={x,æ} følger :

(Ey)(yêUr & y={x,æ})

Dette er det vi ønsker.

Den fjerde konjunkten i Ur7 er:

P;3= ((Ax)(Ay)(M(x) & F;0(x,y) –> ¬M(y)))

Man har da at ß(P;3) er lukningen av den følgende formel:

(4) x,yê(Set U Ur) & xêSet & xêSet & yêUr & y={x,æ} –> ¬(yêSet)

Dette følger umiddelbart ved hjelp av definisjonene av "Ur" og "Set". Man har i lys av disse definisjonene at (Ay)(yêUr –> ¬(yêSet)). Denne formelen impliserer som man ser (4). Dette avslutter beviset for Lemma 4. **QED.**

Dermed har vi kommet til veis ende når det gjelder å gi en skisse av beviset for Teorem 1. Det er da passende å sette sluttstreken her siden de mål som vi satte oss i dette notatet nå er nådd.

***

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *ZFC og eksistensen av urindivider. Noen konsistensresultater.*, Maskinskrevet manuskript, 1986.
Takeuti [1], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Introduction to Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.
Takeuti [2], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

***